Lineare Algebra II

Lösungsvorschläge zum Tutoriumsblatt 11

Moritz Fleischmann

Zur Vorlesung von Prof. Dr. Fabien Morel, Dr. Andrei Lavrenov, Katharina Novikov und Oliver Hendrichs im Sommersemester 25

Disclaimer: Das sind keine offiziellen Lösungen, sondern nur eine getexte Version der Lösungen zu ausgewählten Aufgaben (Dank geht hierbei an Andrei Lavrenov für seine Lösungsskizzen), die ich in meinem Tutorium bespreche. Fehler, Fragen oder Anmerkungen gerne an m.fleischmann@mnet-online.de. Verteilung der Lösungen ist erlaubt und erwünscht.

Wie üblich, wen das Vorgeplänkel nicht interessiert, der kann die Lösungen in den grau hinterlegten Boxen finden. Es gilt grundsätzlich, dass $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$.

Aufgabe 1

Seien $u, v \in \mathbb{R}^n$ als euklidischer Raum, ausgestattet mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot , \cdot \rangle$, wobei $u \neq 0$ gelte. Zeige, dass

$$\|u+v\| = \|u\| + \|v\| \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0} : u = \alpha v$$

Lösung:

Wir wollen diese Aufgabe mithilfe des Skalarprodukts und der Cosinusformel für Winkel lösen. Der Winkel zwischen zwei Vektoren, die in die gleiche Richtung zeigen beträgt 0, während der Winkel zwischen zwei Vektoren, die in entgegengesetzte Richtung zeigen π ist (deswegen funktioniert es auch nur für $\alpha \geq 0$.). Es gilt mit der Definition der Norm:

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u,v\rangle$$

und

$$(\|u\| + \|v\|)^2 = \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2$$

Damit gilt nun

$$\begin{aligned}
&\|u+v\| = \|u\| + \|v\| \\
\Leftrightarrow &\|u+v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2 \\
\Leftrightarrow &\|u\|\|v\| = \langle u,v\rangle \\
\Leftrightarrow &\cos(\angle(u,v)) = \frac{\|u\|\|v\|}{\langle u,v\rangle} = 1 \\
\Leftrightarrow &\angle(u,v) = 0 \\
\Leftrightarrow &\exists \alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0} : u = \alpha v
\end{aligned}$$

was wir zeigen wollten.

Wir beachten, dass diese Aussage nur für Normen gilt, die durch ein Skalarprodukt induzierbar sind. Für andere Normen ist sie im Allgemeinen nicht gültig, wir betrachten dazu:

Es sei $V = \mathbb{R}^2$ mit der 1-Norm, die definiert wird durch

$$\|(x_1, x_2)\|_1 = |x_1| + |x_2|$$

Es sei nun $x = (1,0)$ und $y = (0,1)$. Dann gilt:

$$\|x+y\|_1 = \|(1,1)\|_1 = 2 = \|(1,0)\|_1 + \|(0,1)\|_1 = \|x\|_1 + \|y\|_1$$

obwohl kein $\alpha \geq 0$ existiert, sodass $x = \alpha y$.

Und die 1-Norm kann nicht durch ein Skalarprodukt induziert werden. Für weitergehende Aussagen zu diesem Thema siehe Parallelogrammgleichung, bzw. Satz von Jordan-von Neumann (Das geht aber über diese Vorlesung hinaus).

Aufgabe 2
Sei $V = \mathbb{R}^4$ und

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in V$$

Es sei $U = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle \subseteq V$ ein Unterraum. Finde eine Orthonormalbasis für U.

Lösung:
Wir erinnern zuerst an das Gram-Schmidt-Verfahren.

Das Gram-Schmidt-Verfahren ist eine Möglichkeit zu jedem endlichdimensionalen Vektorraum mit Skalarprodukt eine Orthonormalbasis zu finden, sofern man bereits irgendeine Basis dieses Raums hat. Es basiert darauf, dass wir Vektor für Vektor durchgehen, die Anteile in Richtung aller bisher gewählten Basisvektoren abziehen und die so erhaltenen Vektoren normieren. Prinzipiell ist es sowohl möglich zuerst alle Vektoren zu orthogonalisieren und danach zu normieren, als auch jeden Vektor zu orthogonalisieren und danach sofort zu normieren, bevor man zum nächsten Vektor übergeht. (Ich halte letzteres für einfacher, aber das ist sicherlich eine Geschmacksfrage).
Es sei nun V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (und davon induzierter Norm $\|\cdot\|$) und $w_1, \ldots, w_n$ eine Basis von V. Wir verfahren wie folgt:

- Erster Vektor: Für den ersten Vektor gibt es noch keine Vektoren bezüglich derer wir orthogonalisieren müssen, also gilt einfach

$$v_1 = w_1$$

und diesen Vektor normieren wir mittels

$$\hat{v}_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

- Zweiter Vektor: Für diesen Vektor müssen wir den Anteil in Richtung des ersten Vektors abziehen. Wir wählen dafür $\hat{v}_1$ (dazu später mehr)

$$v_2 = w_2 - \langle \hat{v}_1, w_2 \rangle \hat{v}_1$$

und normieren auch diesen Vektor:

$$\hat{v}_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}$$

- k-ter Vektor für $3 \leq k \leq n$: Wir ziehen den Anteil in Richtung aller bisher gewählten Vektoren ab:
$$v_k = w_k - \langle \hat{v}_1, w_k \rangle \hat{v}_1 - \ldots - \langle \hat{v}_{k-1}, w_k \rangle \hat{v}_{k-1}$$
und normieren diesen Vektor:
$$\hat{v}_k = \frac{v_k}{\|v_k\|}$$

Wenn wir dieses Verfahren auf alle Vektoren angewandt haben, erhalten wir $\hat{v}_1, \ldots, \hat{v}_n$ als Orthonormalbasis für V.

Wollen wir zuerst alle Vektoren orthogonalisieren und am Ende alle so erhaltenen Vektoren normieren, sähe unser Verfahren wie folgt aus:

Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (und davon induzierter Norm $\| \cdot \|$) und $w_1, \ldots, w_n$ eine Basis von V. Wir verfahren wie folgt:

- Erster Vektor: Wir müssen nichts orthogonalisieren, also gilt einfach
$$v_1 = w_1$$
- Zweiter Vektor: Wir müssen den Anteil in Richtung des ersten gewählten Vektors abziehen. Da wir v_1 noch nicht normiert haben, müssen wir den abgezogenen Anteil abhängig von der Länge von v_1 anpassen. Unsere Formel lautet:
$$v_2 = w_2 - \frac{\langle v_1, w_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1$$
- k-ter Vektor für $3 \leq k \leq n$: Wir müssen auch hier den Anteil in Richtung aller bisher gewählten Vektoren abziehen, wobei wir das jeweils an die Länge dieser Vektoren anpassen müssen:
$$v_k = w_k - \frac{\langle v_1, w_k \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \ldots - \frac{\langle v_{k-1}, w_k \rangle}{\langle v_{k-1}, v_{k-1} \rangle} v_{k-1}$$
- Normierung: Wir normieren nun alle Vektoren, das heißt
$$\forall j \in [n] : \hat{v}_j = \frac{v_j}{\|v_j\|}$$

und wir erhalten erneut $\hat{v}_1, \ldots, \hat{v}_n$ als Orthonormalbasis für V.

Diese beiden Verfahren führen zum gleichen Ergebnis, das man sich auch so überlegen kann. Wenn wir die Definition der normierten Vektoren z.B. in der ersten Bestimmungsformel von v_2 expandieren, erhalten wir:

$$v_2 = w_2 - \langle \hat{v}_1, w_2 \rangle \hat{v}_1 = w_2 - \left\langle \frac{v_1}{\|v_1\|}, w_2 \right\rangle \frac{v_1}{\|v_1\|} = w_2 - \frac{\langle v_1, w_2 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1$$

und da $\|v_1\|^2 = \langle v_1, v_1 \rangle$ gilt, erhalten wir die Bestimmungsformel aus dem zweiten Algorithmus zurück.

Es gibt noch ein paar Regeln, die das Rechnen mit Gram-Schmidt einfacher machen können:

1. Die gegebenen Vektoren $w_1, \dots, w_n$ können angepasst werden, solange sie eine Basis bleiben und solange sie innerhalb des Raumes V bleiben. Linearkombinationen von den Basisvektoren sind also erlaubt (solange die lineare Unabhängigkeit nicht zerstört wird.). Haben wir beispielsweise $V = \mathbb{R}^4$ und betrachten den Unterraum $U = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$ mit $w_1 = (1,0,0,1), w_2 = (1,1,1,1), w_3 = (0,1,0,1) \in V$, können wir eine einfachere Startbasis auswählen. Wählen wir $w_2' := w_2 - w_1 - w_3 = (0,0,1,-1)$, haben wir also die neue Basis w_1, w_2', w_3 und die Skalarprodukte sind wesentlich einfacher zu bestimmen.
   Teilweise kann es die Rechnungen schon vereinfachen, wenn man die Vektoren umordnet und zuerst alle Vektoren behandelt, die bereits orthogonal sind.

2. Vorfaktoren sind für orthonormierte Vektoren irrelevant: Das ist in folgendem Sinne gemeint: Sei $v = \alpha w$ mit $v, w \in V$ und $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann gilt:

$$\hat{v} = \frac{v}{\|v\|} = \frac{\alpha w}{\|\alpha w\|} = \frac{\alpha}{|\alpha|} \frac{w}{\|w\|}$$
$$\hat{w} = \frac{w}{\|w\|}$$

   Da $\frac{\alpha}{|\alpha|} \in \mathbb{K}$ liegt, gilt für einen Vektor $u \in V$, dass

$$\langle \hat{v}, u \rangle = \frac{\alpha}{|\alpha|} \langle \hat{w}, u \rangle$$

   u ist also genau dann zu $\hat{w}$ orthogonal, wenn u zu $\hat{v}$ orthogonal ist. Wir können uns dann Rechnungen erleichtern, beispielsweise können wir für

$$v = \begin{pmatrix} 123 \\ 369 \\ 246 \\ 1230 \end{pmatrix} = 123 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} = \alpha w$$

   die Norm $\|w\| = \sqrt{1 + 9 + 4 + 100}$ sehr viel einfacher bestimmen als $\|v\| = \sqrt{123^2 + 369^2 + 246^2 + 1230^2}$.

Wir wollen noch ein Beispiel rechnen:

Es sei $V = \mathbb{R}^3$. Es seien die Vektoren

$$w_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\7\end{pmatrix} \in V$$

gegeben und wir wollen eine ONB mithilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens bestimmen.[a] Wir wollen zuerst unsere Basis anpassen um es nachher einfacher zu haben. Zuerst tauschen wir w_3 und w_2, da wir sehen, dass $w_1 \perp w_3$ gilt. Danach ersetzen wir w_2 durch $w_2' = w_2 + \frac{3}{7}w_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ und arbeiten nun mit der Ausgangsbasis

$$w_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\7\end{pmatrix}, \quad w_2' = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$$

Das Gramschmidtverfahren ist nun:

1. Erster Vektor: Wir müssen nichts orthogonalisieren, also normieren wir einfach nur

$$\hat{v}_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

2. Zweiter Vektor: Wir müssen nur den Anteil in Richtung $\hat{v}_1$ abziehen, aber da $\hat{v}_1 \perp w_3$ gilt, ergibt sich:

$$v_2 = w_3 - \underbrace{\langle \hat{v}_1, w_3 \rangle}_{=0} \hat{v}_1 = w_3$$

und normiert ergibt sich, wenn wir schreiben, dass $v_2 = 7e_3$

$$\hat{v}_3 = \frac{e_3}{\|e_3\|} = e_3$$

3. Dritter Vektor: Wir müssen nun die Anteile in beide bisher gewählten Vektoren abziehen und können aufgrund unser vorherigen Anpassung der Basis wieder nutzen, dass $w_2' \perp e_3$ gilt:

$$v_3 = w_2' - \langle \hat{v}_1, w_2' \rangle \hat{v}_1 - \underbrace{\langle e_3, w_2' \rangle}_{=0} e_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\cdot 3 \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} =: \frac{1}{2}v_3'$$

und normiert ergibt sich - wobei wir den Vorfaktor weglassen:

$$\hat{v}_3 = \frac{v_3'}{\|v_3'\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

und wir erhalten als Endergebnis:

$$\hat{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \hat{v}_2 = e_3, \quad \hat{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

[a] Wir können in diesem Fall natürlich auch die offenbare ONB e_1, e_2, e_3 von V angeben, aber das ist nicht Sinn der Übung!

Man beachte auch, dass das Ergebnis des Gram-Schmidt-Verfahrens nicht eindeutig ist, weil man verschiedene Schritte in unterschiedlicher Reihenfolge anwenden kann. Insbesondere sollte man sich also nicht davon irritieren lassen, wenn diverse Online-Rechner einem ein anderes Ergebnis präsentieren.

Nun zur Aufgabe selbst:

Es gilt:

1. Erster Vektor: Hier normieren wir einfach nur und erhalten:

$$\hat{v}_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix}$$

2. Zweiter Vektor: Wir orthogonalisieren:

$$v_2 = w_2 - \langle \hat{v}_1, w_2\rangle \hat{v}_1 = \begin{pmatrix}4\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{10}{15}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}10\\-1\\1\\-3\end{pmatrix}$$

und normieren:

$$\hat{v}_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{111}}\begin{pmatrix}10\\-1\\1\\-3\end{pmatrix}$$

3. Dritter Vektor: Wir orthogonalisieren:

$$\begin{aligned} v_3 &= w_3 - \langle \hat{v}_1, w_1\rangle \hat{v}_1 - \langle \hat{v}_2, w_3\rangle \hat{v}_2 \\ &= \begin{pmatrix}3\\1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{6}{15}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix} - \underbrace{\frac{30}{111}}_{=\frac{10}{37}}\begin{pmatrix}10\\-1\\1\\-3\end{pmatrix} = \frac{1}{555}\begin{pmatrix}-57\\261\\183\\-216\end{pmatrix}\end{aligned}$$

und wir normieren:

$$\hat{v}_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{555^2}{\sqrt{57^2+261^2+183^2+216^2}}\begin{pmatrix}-57\\261\\183\\-216\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{16835}}\begin{pmatrix}-19\\87\\61\\-72\end{pmatrix}$$

und erhalten somit unsere Orthonormalbasis:

$$\hat{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix}, \quad \hat{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{111}}\begin{pmatrix}10\\-1\\1\\-3\end{pmatrix}, \quad \hat{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{16835}}\begin{pmatrix}-19\\87\\61\\-72\end{pmatrix}$$

Zu dieser Lösung gibt es ein paar Dinge zu sagen:

- Die Zahlen sind alle furchtbar - das ist leider beim Gram-Schmidt-Verfahren häufig so. Sofern nicht bereits vorher ganz gezielt gut geeignete Vektoren ausgewählt werden und man dann das Verfahren genau auf die vorgesehene Art und Weise durchführt, wird man üblicherweise unschöne Ergebnisse erhalten.
- In der Klausur sind keine Taschenrechner zugelassen, also kann es aufwendig sein die Normen auszumultiplizieren. Erhält man ein Ergebnis wie

$$\hat{v}_3 = \frac{555^2}{\sqrt{57^2 + 261^2 + 183^2 + 216^2}} \begin{pmatrix} -57 \\ 261 \\ 183 \\ -216 \end{pmatrix}$$

  dann kann man das so stehen lassen.
- In diesem Fall wurden keine vereinfachenden Schritte durchgeführt um ein schöneres Ergebnis zu erhalten. Man könnte beispielsweise mit den Vektoren

$$w_1' = w_2 - w_3, w_2' = w_3, w_3' = w_1 - 3w_1'$$

  starten und damit ein schöneres und einfacher zu bestimmendes Ergebnis erhalten, z.B.

$$\hat{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \hat{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  was zwar immer noch nicht unbedingt schön ist, aber etwas einfacher als die eingekastelte Lösung.

Aufgabe 3
Sei $(V, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ ein euklidischer Raum und $f : V \to V$ ein Automorphismus auf V. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. f ist eine Isometrie, d.h. es gilt $\forall u, v \in V : \langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$.
2. f verändert die Normen von Vektoren nicht, d.h. $\forall u \in U : \|f(u)\| = \|u\|$
3. Für alle Orthonormalbasen $v_1, \ldots, v_n$ von V ist auch $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ eine ONB von V.
4. Es existiert eine ONB $v_1, \ldots, v_n$ von V, sodass $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ eine ONB von V ist.

Lösung:

Wir zeigen 2) $\Leftrightarrow$ 1) und 1) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 1).

- "1) $\Rightarrow$ 2)"
  Setze $u = v$, dann erhalten wir genau Aussage 2).
- "2) $\Rightarrow$ 1)"
  Seien $u, v \in V$ beliebig. Wir wissen, dass $\forall x \in V : \|f(x)\| = \|x\|$ gilt, also gilt das insbesondere

für u, v und $u+v$. Es gilt also einerseits

$$\|f(u+v)\|^2 = \|f(u)+f(v)\|^2 = \|f(u)\|^2 + 2\langle f(u), f(v)\rangle + \|f(v)\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle f(u), f(v)\rangle$$

und andererseits gilt

$$\|f(u+v)\|^2 = \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2$$

und hieraus können wir folgern, dass $\langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle$ gilt. Das ist aber genau Aussage 1).

- "1) $\Rightarrow$ 3)"
  Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine beliebige ONB von V. Dann gilt für alle $j, k \in [n]$, dass

  $$\langle f(v_j), f(v_k)\rangle = \langle v_j, v_k\rangle = \delta_{j,k}$$

  also ist auch $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ eine ONB von V.
- "3) $\Rightarrow$ 4)"
  Wenn die Aussage für alle ONBs gibt, dann existiert auch eine ONB für die diese Aussage gilt (Solange V nicht nulldimensional ist).
- "4) $\Rightarrow$ 1)"
  Wir nehmen an, dass es eine ONB $v_1, \ldots, v_n$ von V gibt, sodass $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ ebenfalls eine ONB von V ist. Seien nun $u, v \in V$ beliebig, dann gibt es Koeffizienten $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{K}, j \in [n]$ mit

  $$\begin{aligned} u &= \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n \\ v &= \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n \end{aligned}$$

  und damit auch

  $$\begin{aligned} f(u) &= \alpha_1 f(v_1) + \ldots + \alpha_n f(v_n) \\ f(v) &= \beta_1 f(v_1) + \ldots + \beta_n f(v_n) \end{aligned}$$

  und damit gelten

  $$\begin{aligned} \langle u, v\rangle &= \langle \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n, \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \langle \alpha_j v_j, \beta_k v_k\rangle \\ &= \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_j \beta_k \underbrace{\langle v_j, v_k\rangle}_{\delta_{j,k}} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\langle f(u), f(v)\rangle &= \langle \alpha_1 f(v_1) + \ldots + \alpha_n f(v_n), \beta_1 f(v_1) + \ldots + \beta_n f(v_n)\rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \langle \alpha_j f(v_j), \beta_k f(v_k)\rangle \\ &= \sum_{j,k=1}^n \alpha_j \beta_k \underbrace{\langle f(v_j), f(v_k)\rangle}_{\delta_{j,k}} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k\end{aligned}$$

also gilt für alle Vektoren $\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$.

Damit sind alle Äquivalenzen gezeigt.

Aufgabe 4
Wir betrachten den $\mathbb{R}^2$ mit Standardskalarprodukt. Wir erinnern uns an die orthogonale Gruppe, die Isometrien auf $\mathbb{R}^2$:

$$O(2) := \{A \in GL_2(\mathbb{R}) \mid \forall u, v \in \mathbb{R}^2 : \langle Au, Av\rangle = \langle u, v\rangle\}$$

1. Zeige, dass
$$O(2) = \{A \in GL_2(\mathbb{R}) \mid A^T A = \mathbb{1}_2\}$$
2. Für $A \in O(2)$ zeige $\det(A) \in \{\pm 1\}$
3. Zeige für die spezielle orthogonale Gruppe
$$SO(2) = \{A \in O(2) \mid \det(A) = 1\}$$
dass jedes $A \in SO(2)$ als Rotation auf dem $\mathbb{R}^2$ beschrieben werden kann.
4. Zeige, dass jedes $A \in O(2)\backslash SO(2)$ auf $\mathbb{R}^2$ als Rotation gefolgt von der Spiegelung $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ wirkt.

Lösung:

1. Für alle Matrizen $B \in \mathbb{R}^n$ gilt für die Basisvektoren e_j, e_k, dass $e_j^T B e_k$ genau der (j,k)-te Eintrag von B ist. Wir wenden das wie folgt an:
Sei $A \in O(2)$, dann gilt für den (j,k)-ten Eintrag von $A^T A$:
$$e_j^T A^T A e_k = \langle Ae_j, Ae_k\rangle = \langle e_j, e_k\rangle = \delta_{j,k}$$
die Einträge sind also genau 1, wenn $j = k$ gilt und 0 sonst. Das heißt aber, dass $A^T A$ die Einheitsmatrix ist.
Sei nun umgekehrt $A \in GL_2(\mathbb{R})$ mit der Eigenschaft, dass $A^T A = \mathbb{1}_2$. Dann gilt:
$$\langle Au, Av\rangle = u^T A^T A v = u^T \mathbb{1}_2 v = \langle u, v\rangle$$
also liegt $A \in O(2)$.

Man beachte, dass man häufig auch die Eigenschaft $A^T A = \mathbb{1}_2$ als Definition von $O(2)$ findet.

2. Da $A^T A = \mathbb{1}_2$ gilt, gilt auch

$$\det(A)^2 = \det(A^T)\det(A) = \det(A^T A) = \det(\mathbb{1}_2) = 1$$

und damit muss $\det(A) \in \{\pm 1\}$ gelten.

3. Wir verwenden hier zwei trigonometrische Identitäten: Erstens gilt

$$\forall \phi \in \mathbb{R} : (sin(\phi))^2 + (\cos(\phi))^2 = 1$$

und da $\mathsf{im}(\sin) = [-1, 1]$ gibt es für jedes $a \in [0, 1]$ (mindestens) ein $\phi \in [0, 2[$, sodass $(\sin(\phi))^2 = a$ gilt.
Zweitens gilt:

$$\forall \theta, \phi \in \mathbb{R} : \cos(\phi)\cos(\theta) - \sin(\theta)\sin(\phi) = \cos(\theta + \phi)$$

Sei $A \in SO(2)$ und gelte

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

dann gilt

$$\mathbb{1}_2 = A^T A = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

und damit gilt $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1$ und $ab + cd = 0$. Wir wenden nun die erste Identität auf die Gleichungen $a^2 + c^2 = 1$, sowie $b^2 + d^2 = 1$ an und erhalten

$$\exists \phi \in [0, 2\pi] : a = \cos(\phi), c = \sin(\phi)$$
$$\exists \theta \in [0, 2\pi] : b = \sin(\theta), d = \cos(\theta)$$

Es gilt $\det(A) = ad - bc$ und darauf wenden wir die zweite Identität an:

$$1 = ad - bc = \cos(\phi)\cos(\theta) - \sin(\theta)\sin(\phi) = \cos(\theta + \phi)$$

und damit gilt $\theta + \phi = 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$, also $\theta = -\phi + 2k\pi$. Der Kosinus ist symmetrisch, also gilt $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$, während der Sinus antisymmetrisch ist, also gilt $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \sin(\alpha) = -\sin(-\alpha)$ und wir erhalten:

$$\cos(\theta) = \cos(-\phi + 2k\pi) = \cos(\phi)$$
$$\sin(\theta) = \sin(-\phi + 2k\pi) = -\sin(\phi)$$

das heißt insgesamt gilt:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

und das ist genau die Matrix mit der man eine Rotation um ϕ um den Ursprung beschreibt.

4. Es sei $S := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Sei $A \in O(2) \backslash SO(2)$, dann gilt $\det(A) = -1$. Das heißt allerdings, dass

$$\det(AS) = \det(A)\det(S) = 1$$

gilt, also ist AS eine Rotation aus $SO(2)$. Es gilt

$$S^2 = \mathbb{1}_2$$

also ist insbesondere $A = ASS$ das Produkt von $AS \in SO(2)$ und der Spiegelung S.